

Metody numeryczne

Janusz Miller

Katedra Informatyki Stosowanej
AGH University of Science and Technology

12.10.2021

Część II

Iteracyjne metody rozwiązywania równania nieliniowego

- ① Kincaid D., Cheney W.: Analiza numeryczna, WNT 2006
- ② Dudek-Dyduch E., Wąs j., Dutkiewicz L., Grobler-Dębska K. Gudowski B.: Metody numeryczne - Wybrane zagadnienia, Wydawnictwa AGH Kraków 2011
- ③ Wybrane zagadnienia numeryczne - analiza i dobór algorytmów, pod red. J.Wąsa Wydawnictwa AGH Kraków - w druku.
- ④ Burden R., Faires J., Numrical Analysis, Prindle, Weber & Schmidt - Kent, Boston 1985

- 1 Metody iteracyjne – błędy, stabilność, zbieżność
- 2 Podstawowe metody rozwiązywania równania nieliniowego
- 3 Modyfikacje, udoskonalenia
- 4 Uzupełnienia: Kryterium stopu, zera wielokrotne

Metody iteracyjne

Podstawowe pojęcia i oznaczenia



Iteracja – metoda w analizie matematycznej i programowaniu polegająca na wielokrotnym stosowaniu tego samego przekształcenia lub procedury¹.

Iteration – *the action or a process of iterating or repeating: such as*

- a *a procedure in which repetition of a sequence of operations yields results successively closer to a desired result,*
- b *the repetition of a sequence of computer instructions a specified number of times or until a condition is met*².

¹Słownik języka polskiego PWN.

²<https://www.merriam-webster.com/dictionary/iteration>

Ciąg iteracyjny



Ciąg iteracyjny skończony, gdy $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Przykłady:

- ① Algorytm obliczania całek $I_n = \int_0^1 x^n \exp(x-1) dx$ dla $n \in \mathbb{N}$ otrzymany z całkowania przez części
 $I_n = 1 - nI_{n-1}$, $I_1 = 1/e$.
- ② Wyrazy ciągu geometrycznego o postępie $q = \frac{1}{3}$,
 $x_0 = 1$ można wyznaczyć z wzoru
 $x_{n+1} = \frac{13}{3}x_n - \frac{4}{3}x_{n-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$.

Obliczenia numeryczne i wnioski – na ćwiczeniach.

Metody iteracyjne

Stabilność



Algorytm jest stabilny jeżeli małe zmiany danych wejściowych (początkowych) powodują małe zmiany danych wyjściowych (końcowych).

Obliczenia w każdej iteracji $i > 0$ mogą być zaburzone błędem np. zaokrąglenia.

Przyjmijmy, że błędy te są wartościami rzędu ε .

Niech E_n oznacza skumulowany błąd powstały po wykonaniu n iteracji.

Jeżeli $|E_n| \approx Cn\varepsilon$, gdzie C jest stałą, niezależną od n , to mówimy, że wzrost błędu jest **liniowy**.

Jeżeli $|E_n| \approx k^n \varepsilon$, $k > 1$, to wzrost błędu jest **wykładniczy**.

Czy można stosować algorytmy, w których błąd narasta wykładniczo?

Nieskończony ciąg iteracyjny



$$\{x_i\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Jeżeli rozwiązanie zadania numerycznego jest równe granicy w nieskończoności pewnego ciągu, to algorytm polegający na obliczaniu kolejnych elementów tego ciągu) będzie obarczony **błędem obcięcia**.

Algorytm, z definicji, jest skończony.

Błędy obcięcia i błędy zaokrąglenia są niezależne od siebie.

Zbieżność nieskończonego ciągu iteracyjnego



AGH

www.agh.edu.pl

Oznaczenia:

- Granica: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.
- Odchylenie n -tego elementu ciągu: $e_n = x_n - \bar{x}$.
- Ciąg odchyłeń: $\{e_n\}$.

Jeżeli

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K, \quad K > 0, p > 1 \quad \text{lub} \quad 0 < k < 1, p = 1,$$

to ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny z wykładnikiem (rzędem zbieżności) p i stałą K .

Ogólnie



- Rozwiązywanie równania

$$h(x) = g(x)$$

jest równoważne znajdowaniu miejsca zerowego $\bar{x}$ funkcji jednej zmiennej $f(x)$

$$f(x) = h(x) - g(x), \quad f(\bar{x}) = 0.$$

- Założenie o ciągłości – Czy w każdej metodzie konieczne jest sprawdzenie ciągłości przed rozpoczęciem iteracji.
- Funkcja iteracji:

$$x_{n+1} = \Phi_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-s+1}, x_{n-s+2}, \dots, x_n)$$

Metoda iteracji prostej – *Fixed-Point Iteration*



Tworzymy funkcję $\Phi(x)$, dla której $\bar{x}$ jest punktem stałym, czyli $\bar{x} = \Phi(\bar{x})$, oraz jest miejscem zerowym funkcji $f(x)$, czyli $f(\bar{x}) = 0$.

- Dane startowe: x_0 , bez warunków.
- Algorytm:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n).$$

- Warunek wystarczający zbieżności:
Jeżeli $\bar{x} - |x_0 - \bar{x}| \leq x \leq \bar{x} + |x_0 - \bar{x}|$
to $|\Phi'(x)| < 1$.
- Rząd zbieżności: 1.
- Koszt iteracji: Jednokrotne obliczenie $\Phi(x_n)$.

Metoda bisekcji czyli połowienia przedziału



- Dane startowe: $x_a, x_b : f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$.
- Algorytm: znany – podział przedziału na dwie części i wybór części, w której jest miejsce zerowe.
Każda iteracja jest przekształceniem zwężającym przedział nieokreśloności miejsca zerowego.
- Zbieżność: gwarantowana.
- Rząd zbieżności: 1.
- Koszt iteracji: Jednokrotne obliczenie $f(x_n)$.

Metoda Newtona-Raphsona czyli stycznych



AGH

www.agh.edu.pl

- Dane startowe: x_0 .

- Algorytm:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- Zbieżność: Nie gwarantowana. Warunki wyrażane z użyciem 1. i 2. pochodnej – nie mają praktycznego znaczenia.
- Rząd zbieżności: 2.
- Koszt iteracji: Jednokrotne obliczenie $f(x_n)$ i $f'(x_n)$. Konieczna możliwość obliczania pochodnej!

Metoda siecznych



www.agh.edu.pl

- Dane startowe: x_0, x_1 .
- Algorytm:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Zbieżność: jak w metodzie stycznych
- Rząd zbieżności: $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$
- Koszt iteracji: Jednokrotne obliczenie $f(x_n)$.

Reguła fałsi czyli metoda fałszywej reguły



AGH

www.agh.edu.pl

- Dane startowe: Jak w metodzie bisekcji.
- Algorytm:
Przekształcenie zwężające podobnie jak w metodzie bisekcji, ale punkt podziału wyznaczany sieczną prowadzoną przez punkt $(x_n, f(x_n))$ oraz ostatni z punktów, dla którego wartość funkcji jest przeciwnego do $f(x_n)$ znaku.
- Zbieżność: Gwarantowana.
- Rząd zbieżności: ?
- Koszt iteracji: Jednokrotne obliczenie $f(x_n)$.

Metoda Müllera



- Dane startowe: $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$.
W praktyce dodaje się warunek „dodatkowy” – warunek przeciwnego znaku jednej z ww. wartości funkcji – dla gwarancji istnienia zera w przedziale zawierającym $\{x_0, x_1, x_2\}$.
- Algorytm: Znaleźć współczynniki funkcji kwadratowej (ew. liniowej) interpolującej wartości startowe i pierwiastki tej funkcji oraz wybrać „właściwy pierwiastek”.
- Warunki zbieżności: gwarancja zbieżności tylko przy warunku „dodatkowym”.
- Rząd zbieżności: ≈ 1.9 .
- Koszt iteracji: Jednokrotne obliczenie $f(x_n)$.

Metoda odwrotnej interpolacji kwadratowej



AGH

www.agh.edu.pl

- Przybliżeniem miejsca zerowego funkcji $f(x)$ w metodzie Müllera jest miejsce zerowe wielomianu drugiego stopnia $y = W(x)$ interpolującego trzy ostatnio znalezione przybliżenia.
Metoda **odwrotnej** interpolacji kwadratowej „zastępuje” funkcję $y = W(x)$ funkcją odwrotną, czyli $x = V(y)$ i to jej zero jest przybliżeniem miejsca zerowego funkcji $f(x)$.
- Rząd zbieżności: ≈ 1.8 .
- Koszt iteracji: Jednokrotne obliczenie $f(x_n)$.
- W przypadku, gdy wartości funkcji $f(x)$ w ostatnich 3 przybliżeniach są tego samego znaku, metoda ta może okazać się niezbieżną, (podobnie jak metoda Müllera).
- „Daleko” od miejsca zerowego funkcji $f(x)$ może zawodzić, np. w przypadku, gdy wartości funkcji $f(x)$ w trzech ostatnich przybliżeniach nie są różne.

Metoda przyspieszania zbieżności Δ^2 -Aitkena



AGH

www.agh.edu.pl

Założenie:

Ciąg $\{x_n\}$ jest liniowo zbieżny, ($p = 1$).

Wtedy, dla dużego n

$$\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{x_n - \bar{x}} \approx K \approx \frac{x_n - \bar{x}}{x_{n-1} - \bar{x}}$$

Stąd obliczamy $\bar{x}$, które jest przybliżeniem y_n

$$y_n = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}.$$

$\{y_n\}$ jest ciągiem zbieżnym kwadratowo ($p = 2$).

Algorytm Steffensena bazujący na metodzie liniowej



Wyrazy ciągu $\{y_n\}$ są wyznaczone w trakcie tworzenia ciągu $\{x_n\}$.

- ① Obliczenie 3 wyrazów ciągu liniowego.
- ② Obliczenie y_1 .
- ③ Obliczenie 2 wyrazów ciągu liniowego startując od y_1 .
- ④ Obliczenie y_2 .
- ⑤ Obliczenie 2 wyrazów ciągu liniowego startując od y_2 .
- ⑥ Obliczenie y_3 .
- ⑦ itd.

Newton uproszczony



Przyjmuje się, że czas obliczania pochodnej jest 2 do 4 razy dłuższy od czasu obliczania wartości funkcji.

Dlatego:

Jeżeli punkt startowy metody Newtona leży blisko miejsca zerowego, to oblicza się pochodną tylko w punkcie startowym. W następnych iteracjach – zamiast wyznaczać wartości pochodnej w kolejnych punktach – korzysta się z wartości pochodnej w punkcie startowym.

Metoda Steffensena jako modyfikacja metody siecznych i stycznych



Szkic metody:

W metodzie stycznych

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

po pochodną zastępujemy ilorazem różnicowym

$$\frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$$

ale długość kroku h uzależniamy od odległości od miejsca zerowego – przyjmujemy

$$h = f(x_n).$$

Algorytm Brenta-Dekera



AGH

Kombinacja 3 metod, które:

- gwarantują zbieżność (w każdej iteracji przekształcenie zwężające),
- nie wymagają obliczania pochodnej funkcji (nie są kosztowne).

. Są to metody:

- bisekcji,
- reguła falsi,
- odwrotnej interpolacji kwadratowej.

Upraszczając:

W każdej iteracji jest wybierana metoda, która najbardziej zmniejszy przedział nieokreśloności szukanego miejsca zerowego.

Metody podobne, np. Riddersa

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Riddersa]

Kryteria stopu



- Wartość funkcji $|f(x_n)| < \text{TolFun}$,
- długość kroku $|x_n - x_{n-1}| < \text{TolX}$,
- długość minimalnego przedziału zawierającego miejsce zerowe $|x_n - x_k| < \text{TolX}$, gdzie $k < n$, $f(x_n) \cdot f(x_k) < 0$,
- wartość pochodnej funkcji $f'(x_n)$ (w powiązaniu z długością kroku),
- maksymalna liczba iteracji.

Uwagi:

- 1 Często wartość wstępna TolX i TolFun jest rzędu 10^{-14} , a ogólniej $\approx 100\epsilon$.
- 2 Należy uwzględnić błąd wyznaczania wartości funkcji (np. zaokrąglania, operacji arytmetycznych, obciążenia).
- 3 W przypadku parzystokrotnych miejsc zerowych dobrze byłoby rozpoznać (w niezależny od metody sposób), czy miejsce zerowe faktycznie istnieje. Testy numeryczne mogą być mało wiarygodne ze względu na



Dziękuję za uwagę

Część VII

Numeryczna algebra liniowa

- 5 Ważniejsze pojęcia
- 6 Niesobliwe układy równań
 - Uwarunkowanie układu równań
 - Algorytmy bezpośrednie
 - Algorytmy iteracyjne
- 7 Układy równań z prostokątną macierzą współczynników
- 8 Zagadnienie własne
 - Wartości własne macierzy
 - Wartości osobliwe macierzy



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę



Dziękuję za uwagę