

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Piotr Sokołowski

Materiały powtórkowe

## Spis treści

<b>1. Część I - prawdopodobieństwo klasyczne</b>	<b>5</b>
1.1. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa . . . . .	5
1.2. Co, gdy zdarzenia nie są równie prawdopodobne . . . . .	5
1.3. Podstawowe własności prawdopodobieństwa . . . . .	5
1.4. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa . . . . .	6
1.4.1. Przeliczalny zbiór zdarzeń elementarnych . . . . .	6
1.4.2. Paradoks Bertranda . . . . .	6
1.4.3. Subaddytywność prawdopodobieństwa . . . . .	6
1.4.4. Wzór włączeń i wyłączeń . . . . .	7
1.4.5. Twierdzenie o ciągłości . . . . .	7
1.5. Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	7
1.5.1. Wzór łańcuchowy . . . . .	7
1.6. Prawdopodobieństwo całkowite . . . . .	8
1.6.1. Rozbicie przestrzeni . . . . .	8
1.6.2. Wzór Bayesa . . . . .	8
1.7. Niezależność zdarzeń . . . . .	8
1.7.1. Niezależność wielu zdarzeń . . . . .	8
1.7.2. Własności . . . . .	9
1.8. Schemat Bernoulliego . . . . .	9
1.8.1. Twierdzenie . . . . .	9
1.9. Lemat Borela-Cantelliego . . . . .	9
1.9.1. Lemat 1 . . . . .	10
1.9.2. Lemat 2 . . . . .	10
<b>2. Część II - Zmienna losowa</b>	<b>10</b>
2.1. Zmienna losowa . . . . .	10
2.2. Rozkład prawdopodobieństwa . . . . .	10
2.3. Rozkłady dyskretne . . . . .	10
2.3.1. Rozkład rzutu kością . . . . .	10

2.4. Rozkład Bernoulliego . . . . .	11
2.5. Rozkład geometryczny . . . . .	11
2.6. Rozkłady ciągłe . . . . .	11
2.6.1. Stwierdzenie 1 . . . . .	11
2.6.2. Stwierdzenie 2 . . . . .	12
2.6.3. Rozkład jednostajny . . . . .	12
2.7. Rozkład wykładniczy . . . . .	12
2.8. Dystrybuanta . . . . .	12
2.8.1. Własności . . . . .	12
2.8.2. Twierdzenie . . . . .	13
2.9. Działania na rozkładzie zmiennej losowej . . . . .	13
2.10. Wartość oczekiwana . . . . .	13
2.10.1. Przypadek dyskretny . . . . .	13
2.10.2. Przypadek ciągły . . . . .	13
2.11. Wartość oczekiwana dla funkcji od zmiennej losowej . . . . .	14
2.11.1. Przypadek dyskretny . . . . .	14
2.12. Własności wartości oczekiwanej . . . . .	14
2.12.1. Twierdzenie . . . . .	14
2.12.2. Stwierdzenie . . . . .	14
2.13. Wariancja . . . . .	15
2.13.1. Twierdzenie (własności) . . . . .	15
2.14. Momenty . . . . .	15
2.15. Kowariancja . . . . .	15
2.16. Współczynnik korelacji . . . . .	15
2.16.1. Twierdzenie . . . . .	16
2.17. Rozkłady . . . . .	16
2.17.1. Rozkłady brzegowe . . . . .	16
2.18. Typy rozkładów wektora losowego . . . . .	16
2.18.1. Rozkład dyskretny . . . . .	16
2.18.2. Rozkład ciągły . . . . .	16
2.19. Dystrybuanta wektora losowego . . . . .	16
2.20. Wartość oczekiwana wektora losowego . . . . .	17
2.21. Macierz kowariancji . . . . .	17
2.22. Niezależność zmiennych losowych . . . . .	17
2.22.1. Niezależność rozkładów dyskretnych . . . . .	17
2.22.2. Niezależność rozkładów ciągłych . . . . .	17
2.23. Niezależność funkcji od niezależnych zmiennych losowych . . . . .	18
2.24. Wartość oczekiwana iloczynu zmiennych losowych . . . . .	18
2.25. Wariancja sumy niezależnych zmiennych losowych . . . . .	18
2.26. Sploty . . . . .	18
2.26.1. Splot zmiennych dyskretnych . . . . .	18
2.26.2. Splot zmiennych ciągłych . . . . .	19
2.27. Nieskończone ciągi zmiennych niezależnych . . . . .	19

2.28. Rozkład warunkowy . . . . .	19
2.28.1. Rozkład warunkowy dla zmiennej dyskretnej . . . . .	19
2.28.2. Rozkład warunkowy dla zmiennej ciągłej . . . . .	19
2.29. Warunkowa wartość oczekiwana . . . . .	20
2.29.1. Wartość oczekiwana rozkładu warunkowego . . . . .	20
2.29.2. Twierdzenie . . . . .	20
2.29.3. Warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej . . . . .	20
2.29.4. Warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej $Y$ pod warunkiem zmiennej losowej $X$ . . . . .	21
2.29.5. Własności warunkowej zmiennej losowej . . . . .	21
<b>3. Część III - statystyka</b>	<b>21</b>
3.1. Nierówność Czebyszewa . . . . .	21
3.1.1. Nierówność Markowa . . . . .	21
3.1.2. Nierówność Czebyszewa-Bienaymé . . . . .	22
3.1.3. Wykładnicza nierówność Czebyszewa . . . . .	22
3.2. Prawa Wielkich Liczb . . . . .	22
3.2.1. Prawo Wielkich Liczb Bernoulliego . . . . .	22
3.2.2. Słabe Prawo Wielkich Liczb (SPWL) . . . . .	22
3.2.3. Mocne Prawo Wielkich Liczb Bernoulliego . . . . .	23
3.2.4. Twierdzenie Kołmogorowa . . . . .	23
3.2.5. Mocne Prawo Wielkich Liczb (MPWL) Kołmogorowa . . . . .	23
3.3. Twierdzenia Poissona . . . . .	23
3.3.1. Twierdzenie Poissona . . . . .	23
3.3.2. Twierdzenie . . . . .	24
3.4. Rozkład Gaussa . . . . .	24
3.5. Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG) . . . . .	24
3.5.1. Wersja najprostrza . . . . .	24
3.5.2. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a . . . . .	24
3.5.3. Twierdzenie Berry-Esséen . . . . .	25
3.6. Populacja i próba . . . . .	25
3.7. Średnia i częstość . . . . .	25
3.7.1. Średnia ("cechy ilościowe") . . . . .	25
3.7.2. Częstość ("cechy jakościowe") . . . . .	25
3.8. Estymatory . . . . .	26
3.8.1. Wartość estymatora . . . . .	26
3.8.2. Obciążenie estymatora . . . . .	26
3.8.3. Estymator nieobciążony . . . . .	26
3.8.4. Estymator nieobciążony o minimalnej wariancji (NMW) . . . . .	26
3.9. Błędy . . . . .	26
3.9.1. Błąd średniokwadratowy . . . . .	26
3.9.2. Estymator dopuszczalny . . . . .	27
3.9.3. Błąd standardowy . . . . .	27



# 1. Część I - prawdopodobieństwo klasyczne

## 1.1. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję  $P$  o wartościach rzeczywistych, określoną na  $\sigma$ -ciele zdarzeń  $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ , spełniającą warunki:

1.  $P(A) \geq 0$  dla każdego  $A \in \mathcal{F}$
2.  $P(\Omega) = 1$
3. Jeżeli dla  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  parami rozłącznych (tzn.  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , gdy  $i \neq j$  dla  $i, j \in \mathbb{N}_+$ ), to

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$

Trójkę  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  nazywamy przestrzenią probabilistyczną

## 1.2. Co, gdy zdarzenia nie są równie prawdopodobne

Niech  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  i ponadto niech będą dane nieujemne liczby  $p_1, \dots, p_n$  takie, że  $p_1 + \dots + p_n = 1$ . Dla każdego zbioru  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$  definiujemy

$$P(A) = \sum_{j=1}^k p_{i_j}$$

Wtedy  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną

## 1.3. Podstawowe własności prawdopodobieństwa

Jeżeli  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną i  $A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ , to:

1.  $P(\emptyset) = 0$
2. Jeżeli dla  $A_1, A_2, \dots, A_n$  parami rozłącznych (tzn.  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , gdy  $i \neq j$  dla  $i, j \in \mathbb{N}_+$ ), to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

3.  $P(A') = 1 - P(A)$
4. Jeżeli  $A \subset B$ , to  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
5. Jeżeli  $A \subset B$ , to  $P(A) \leq P(B)$
6. Dla dowolnego  $A$  zachodzi  $P(A) \leq 1$
7.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 1.4. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Przyjmijmy, że zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest skończony, a same zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne. Wówczas prawdopodobieństwo zdarzenia  $A \subset \Omega$  wynosi

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Powyższy wzór nazywany jest klasyczną definicją prawdopodobieństwa

### 1.4.1. Przeliczalny zbiór zdarzeń elementarnych

Założmy, że  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  i  $\{\omega_i\} \in \mathcal{F}$  dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ , oraz że  $p$  jest prawdopodobieństwem. Wówczas każdy zbiór  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\} \subset \Omega$  jest zdarzeniem, a ponadto

$$P(A) = \sum_{k \geq 1} p_{i_k}$$

gdzie  $p_i = P(\{\omega_i\})$

**Uwaga:** Na zbiorze przeliczalnym i nieskończonym prawdopodobieństwo nie może być rozłożone równo!

### 1.4.2. Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu  $r = 1$  skonstruowano losowo cięciwę  $AB$ . Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

### 1.4.3. Subaddytywność prawdopodobieństwa

Niech  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  będzie przestrzenią probabilistyczną, oraz niech  $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ . Wówczas

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

#### 1.4.4. Wzór włączeń i wyłączeń

Niech  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla dowolnego  $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$  zachodzi

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

#### 1.4.5. Twierdzenie o ciągłości

Niech  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  będzie przestrzenią probabilistyczną.

1. Jeżeli  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ , oraz dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$  (nazywamy  $A_n$  wstępującą rodziną zdarzeń) i  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , to

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

2. Jeżeli  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ , oraz dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{n+1} \subset A_n$  (nazywamy  $A_n$  zstępującą rodziną zdarzeń) i  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , to

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

### 1.5. Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia  $A$  pod warunkiem zajścia zdarzenia  $B$ , gdzie  $P(B) > 0$ , nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Uwaga:** Pisząc  $P(A|B)$  zawsze milcząco zakładamy, że  $P(B) > 0$

#### 1.5.1. Wzór łańcuchowy

Jeżeli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_n$  spełniają warunek  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$  to

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

## 1.6. Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli  $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  jest rozbiem  $\Omega$  na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla dowolnego zdarzenia  $A$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

### 1.6.1. Rozbicie przestrzeni

Rozbiciem przestrzeni  $\Omega$  nazywamy rodzinę zdarzeń  $\{H_i\}_{i \in I}$ , które parami wykluczają się, ich suma zaś jest równa  $\Omega$

### 1.6.2. Wzór Bayesa

Jeżeli  $\{H_i\}_{i \in I}$  jest przeliczalnym rozbiem  $\Omega$  na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie oraz  $P(A) > 0$ , to dla dowolnego  $j \in I$  mamy

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i \in I} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$

## 1.7. Niezależność zdarzeń

Zdarzenia  $A$  i  $B$  nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Alternatywnie: zdarzenie  $B$  nie zależy od zdarzenia  $A$ , gdy

$$P(B|A) = P(B)$$

### 1.7.1. Niezależność wielu zdarzeń

Zdarzenia  $A_1, \dots, A_n$  nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

dla wszystkich ciągów wskaźników  $(i_1, \dots, i_k)$ , gdzie  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$

### 1.7.2. Własności

1. Jeśli zdarzenia  $A_1$  i  $A_2$  są niezależne, to  $A_1$  i  $A_2'$ ,  $A_1'$  i  $A_2$ , oraz  $A_1'$  i  $A_2'$  są parami zdarzeń niezależnych
2. Jeśli  $A_1, \dots, A_n$  są niezależne, to niezależne są także  $B_1, \dots, B_n$ , gdzie  $B_i = A_i$  lub  $B_i = A_i'$ ,  $i = 1, \dots, n$
3. Następujące warunki są równoważne:
  - Zdarzenia  $A_1, \dots, A_n$  są niezależne
  - Dla każdego ciągu  $B_1, \dots, B_n$ , gdzie  $B_i = A_i$  lub  $B_i = A_i'$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zdarzenia  $B_i$  są niezależne
  - Dla każdego ciągu  $B_1, \dots, B_n$ , gdzie  $B_i = A_i$  lub  $B_i = A_i'$ ,  $i = 1, \dots, n$  zachodzi równość

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(B_{i_k})$$

4. Gdy  $A_1, \dots, A_n$  są niezależne, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

### 1.8. Schemat Bernoulliego

Schematem Bernoulliego będziemy nazywać skończony ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwóch możliwych wynikach, nazywanych umownie sukcesem i porażką. Poszczególne doświadczenia będziemy nazywać próbami Bernoulliego.

#### 1.8.1. Twierdzenie

Prawdopodobieństwo pojawienia się dokładnie  $k$  sukcesów w schemacie Bernoulliego  $n$  prób, z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym  $p$  wynosi

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

### 1.9. Lemat Borela-Cantelliego

Dla dowolnego ciągu zdarzeń  $(A_n)$ , definiujemy zbiór zdarzeń, które zachodzą nieskończenie często jako:

$$\{A_n \text{ n.c.}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

### 1.9.1. Lemat 1

Jeśli  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , to  $P(\{A_n \text{ n.c.}\}) = 0$

### 1.9.2. Lemat 2

Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  są niezależne i  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ , to  $P(\{A_n \text{ n.c.}\}) = 1$

## 2. Część II - Zmienna losowa

### 2.1. Zmienna losowa

Funkcję  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy zmienną losową o wartościach w  $\mathbb{R}$ , jeśli dla każdego  $a \in \mathbb{R}$  zbiór  $X^{-1}([-\infty, a])$  jest zdarzeniem, czyli  $X^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{F}$

### 2.2. Rozkład prawdopodobieństwa

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  nazywamy prawdopodobieństwo  $\mu_X$ , określone na zbiorach borelowskich  $\mathbb{R}$  zależnością

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

**Uwaga:** Zmienne losowe równe z prawdopodobieństwem 1 są nierozróżnialne z punktu widzenia teorii.

### 2.3. Rozkłady dyskretne

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład dyskretny, jeśli istnieje taki zbiór przeliczalny  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ , że  $\mu_X(\mathcal{S}) = 1$ .

#### 2.3.1. Rozkład rzutu kością

Niech  $X$  będzie wynikiem rzutu symetryczną kostką. Wtedy

$$\mu_X(\{i\}) = P(X = i) = \frac{1}{6}, \quad \text{gdy } i = 1, 2, \dots, 6$$

## 2.4. Rozkład Bernoulliego

Niech  $X$  oznacza liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego  $n$  z prawdopodobieństwem sukcesu  $p$  w pojedynczym doświadczeniu. Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie  $K$  sukcesów wynosi

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mówimy, że zmienna losowa ma rozkład Bernoulliego.

## 2.5. Rozkład geometryczny

Wykonujemy co sekundę doświadczenia Bernoulliego, aż do chwili otrzymania sukcesu. Niech  $X$  oznacza liczbę wykonanych doświadczeń,  $Y$  - mierzony w sekundach czas. Wyznaczamy rozkłady tych zmiennych

## 2.6. Rozkłady ciągłe

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład ciągły, gdy istnieje taka funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że

$$\mu_X(A) = \int_A f(x) dx, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Funkcję  $f$  nazywamy gęstością rozkładu  $\mu_X$ .

### 2.6.1. Stwierdzenie 1

Jeśli zmienna losowa  $X$  ma rozkład ciągły o gęstości  $f$  i (z prawdopodobieństwem 1)  $X \in (a, b)$ , funkcja  $\psi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $\mathcal{C}^1$  oraz  $\psi'(x) \neq 0$  dla  $x \in (a, b)$ , to zmienna losowa  $Y = \psi(X)$  ma rozkład ciągły o gęstości

$$g(y) = f(h(y)) |h'(y)| 1_{\psi(l)}(y)$$

gdzie  $h(s) = \psi^{-1}(s)$ ,  $l = (a, b)$ .

### 2.6.2. Stwierdzenie 2

Jeśli zmienna losowa  $X$  ma rozkład ciągły o gęstości  $f_X$ , to zmienna losowa  $Y = aX + b$ , gdzie  $a \neq 0$ , ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_Y(u) = f_X\left(\frac{u-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$$

### 2.6.3. Rozkład jednostajny

Gdy gęstość jest stała w przedziale  $[a, b]$ , a dokładniej

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

## 2.7. Rozkład wykładniczy

Powiemy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$ , gdy gęstość ma postać

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0, \infty)}(x)$$

## 2.8. Dystrybuanta

Dystrybuantą zmiennej losowej  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy funkcję  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , określoną zależnością

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

### 2.8.1. Własności

Dystrybuanta  $D_X$  zmiennej losowej  $X$  ma następujące własności:

1.  $F_X$  jest niemalejąca
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$ ;  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$
3.  $F_X$  jest prawostronnie ciągła

### 2.8.2. Twierdzenie

Jeżeli funkcja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia podane wcześniej własności dystrybuanty, to jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej; jej rozkład jest wyznaczony jednoznacznie.

Jeśli dystrybuanta  $F_X$  jest ciągła w punkcie  $t$ , to  $P(X = t) = 0$ , a gdy  $F_X$  ma skok o wielkości  $d$ , to  $P(X = t) = d > 0$ .

### 2.9. Działania na rozkładzie zmiennej losowej

1. Niech  $P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{1}{6}$ ,  $P(X = 0) = \frac{2}{3}$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $Y = X^2$ .
2. Niech  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Znaleźć rozkład  $Y = e^{-X}$ .
3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na  $[0, 3]$ . Znaleźć rozkłady zmiennych losowych  $Y = \min(X, X^2)$  i  $Z = \max(2, X)$ . Czy są to rozkłady ciągłe?

### 2.10. Wartość oczekiwana

#### 2.10.1. Przypadek dyskretny

Niech  $X$  ma rozkład  $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$ . Mówimy, że wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$  istnieje, gdy  $\sum_{i \in I} |x_i| p_i < \infty$ . Wtedy wartością oczekiwaną zmiennej losowej nazywamy liczbę

$$\mathcal{E}X = \sum_{i \in I} x_i p_i < \infty$$

W przeciwnym razie powiemy, że zmienna losowa nie ma wartości oczekiwanej.

#### 2.10.2. Przypadek ciągły

Żałóżmy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład ciągły z gęstością  $f$ . Mówimy, że istnieje wartość oczekiwana, gdy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

Wartością oczekiwaną nazwiemy wtedy liczbę

$$\mathcal{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

## 2.11. Wartość oczekiwana dla funkcji od zmiennej losowej

Niech  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dowolną funkcją.

### 2.11.1. Przypadek dyskretny

Jeśli zmienna losowa  $X$  ma rozkład dyskretny  $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$ , to wartość oczekiwana  $\varphi(X)$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg  $\sum_{i \in I} |\varphi(x_i)|p_i$ . Wtedy

$$\mathcal{E}\varphi(X) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i)p_i$$

## 2.12. Własności wartości oczekiwanej

### 2.12.1. Twierdzenie

Założmy, że istnieją wartości oczekiwane  $\mathcal{E}X$  i  $\mathcal{E}Y$ . Wtedy

1. jeśli  $X \geq 0$ , to  $\mathcal{E}X \geq 0$
2. jeśli  $X \leq Y$ , to  $\mathcal{E}X \leq \mathcal{E}Y$
3.  $|\mathcal{E}X| \leq \mathcal{E}|X|$
4. dla  $a, b \in \mathbb{R}$  istnieje wartość oczekiwana zmiennej  $aX + bY$  i

$$\mathcal{E}(aX + bY) = a\mathcal{E}X + b\mathcal{E}Y$$

5. jeśli  $X = 1_A$ , to  $\mathcal{E}X = P(A)$

### 2.12.2. Stwierdzenie

1. Jeżeli  $X$  jest zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne, to  $\mathcal{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$ .
2. Jeśli  $X \geq 0$ , to

$$\mathcal{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t))dt = \int_0^{\infty} P(X > t)dt$$

przy czym istnienie jednego z tych wyrażeń implikuje istnienie pozostałych i ich równość.

## 2.13. Wariancja

Założmy, że  $\mathcal{E}X = m$ . Jeśli  $\mathcal{E}((X - m)^2) < \infty$ , to tę liczbę nazwiemy wariancją zmiennej losowej  $X$  o wartościach rzeczywistych i oznaczamy

$$\mathcal{D}^2 X = \mathcal{E}((X - m)^2) \mathcal{D}^2 X = \mathcal{E}X^2 - (\mathcal{E}X)^2$$

### 2.13.1. Twierdzenie (własności)

Jeśli  $X$  jest zmienną losową, dla której  $\mathcal{E}X^2 < \infty$ , to istnieje  $\mathcal{D}^2 X$  oraz:

1.  $\mathcal{D}^2 X \geq 0$ ;  $\mathcal{D}^2 X = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P(X = c) = 1$  dla pewnej stałej  $c$
2.  $\mathcal{D}^2(cX) = c^2 \mathcal{D}^2 X$
3.  $\mathcal{D}^2(X + a) = \mathcal{D}^2 X$

## 2.14. Momenty

Momentem absolutnym rzędu  $r > 0$  nazywamy liczbę  $\mathcal{E}|X|^r$ , a momentem zwykłym liczbę  $\mathcal{E}(X^r)$ . Ostatnie wyrażenie ma zawsze sens dla liczb naturalnych. Liczbę  $\mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^r$  nazywamy momentem centralnym.

## 2.15. Kowariancja

Kowariancją całkowalnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ , spełniających warunek  $\mathcal{E}|XY| < \infty$ , nazywamy wielkość

$$\text{cov}(X, Y) = \mathcal{E}((X - \mathcal{E}X)(Y - \mathcal{E}Y)) \text{cov}(X, Y) = \mathcal{E}(XY) - \mathcal{E}X\mathcal{E}Y$$

## 2.16. Współczynnik korelacji

Współczynnik korelacji definiujemy jako

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{(\mathcal{D}^2 X)(\mathcal{D}^2 Y)}}, \quad \mathcal{D}^2 X, \mathcal{D}^2 Y > 0$$

### 2.16.1. Twierdzenie

Jeżeli zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  mają wariancje, to istnieje wariancja ich sumy i

$$\mathcal{D}^2(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}^2 X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

### 2.17. Rozkłady

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  o wartościach w  $\mathbb{R}^n$  nazywamy rozkład prawdopodobieństwa  $\mu_X$ , określony na  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  zależnością

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

#### 2.17.1. Rozkłady brzegowe

$$P(X_j \in B) = P(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{j-1} \in \mathbb{R}, X_j \in B, X_{j+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R})$$

### 2.18. Typy rozkładów wektora losowego

#### 2.18.1. Rozkład dyskretny

Wektor losowy  $(X, Y)$  nazywamy dyskretnym, jeśli istnieje zbiór przeliczalny  $S \subset \mathbb{R}^2$ , dla którego  $\mu_X(S) = 1$

#### 2.18.2. Rozkład ciągły

Mówimy, że wektor losowy  $(X, Y)$  ma rozkład ciągły, gdy istnieje gęstość, czyli funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

### 2.19. Dystrybuanta wektora losowego

Dystrybuantą wektora losowego  $(X, Y)$  o wartościach w  $\mathbb{R}^2$  nazywamy funkcję  $F_{(X, Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  określoną zależnością

$$F_{(X, Y)}(t, s) = P(X \leq t, Y \leq s) = \mu_X((-\infty, t] \times (-\infty, s])$$

## 2.20. Wartość oczekiwana wektora losowego

Wartością oczekiwaną wektora losowego  $X = (X_1, \dots, X_n)$  o wartościach w  $\mathbb{R}^n$  nazywamy wektor  $\mathcal{E}X = (\mathcal{E}X_1, \dots, \mathcal{E}X_n)$ , o ile wszystkie współrzędne mają wartość oczekiwaną.

## 2.21. Macierz kowariancji

Jeśli  $\mathcal{D}^2 X_j < \infty$  dla każdego  $j = 1, 2, \dots, n$ , to macierz  $Q_X = [c_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ , gdzie  $c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$  nazywamy macierzą kowariancji wektora losowego  $X = (X_1, \dots, X_n)$

Macierz kowariancji zmiennej losowej dwuwymiarowej  $(X, Y)$ :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}^2 X & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \mathcal{D}^2 Y \end{bmatrix}$$

## 2.22. Niezależność zmiennych losowych

Zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  o wartościach w  $\mathbb{R}$ , określone na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  nazywamy niezależnymi, gdy dla każdego ciągu zbiorów borelowskich  $B_1, \dots, B_n$  zachodzi równość

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in B_n)$$

### 2.22.1. Niezależność rozkładów dyskretnych

Zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  o rozkładach dyskretnych są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , gdzie  $P(X_i = x_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n)$$

### 2.22.2. Niezależność rozkładów ciągłych

Jeśli  $X_1, \dots, X_n$  są zmiennymi losowymi o rozkładach ciągłych z gęstościami odpowiednio  $g_1, \dots, g_n$ , to zmienne te są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu_{(X_1, \dots, X_n)}$  jest rozkładem ciągłym z gęstością

$$g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \cdot \dots \cdot g_n(x_n)$$

## 2.23. Niezależność funkcji od niezależnych zmiennych losowych

Założmy, że zmienne losowe

$$X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{1,k_1}, X_{2,1}, \dots, X_{2,k_2}, \dots, X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$$

są niezależne. Niech  $\varphi_j : \mathbb{R}^{k_j} \rightarrow \mathbb{R}$  będą takimi funkcjami, że  $Y_j = \varphi_j(X_{j,1}, \dots, X_{j,k_j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  są zmiennymi losowymi. Wówczas zmienne losowe  $Y_1, \dots, Y_n$  są niezależne

## 2.24. Wartość oczekiwana iloczynu zmiennych losowych

Jeśli  $X_1, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, które mają wartość oczekiwaną, to istnieje wartość oczekiwana iloczynu  $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$  i

$$\mathcal{E}(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = \mathcal{E}X_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{E}X_n$$

## 2.25. Wariancja sumy niezależnych zmiennych losowych

Jeżeli  $X_1, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, mającymi wariancję, to istnieje wariancja sumy i

$$\mathcal{D}^2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}^2 X_i$$

## 2.26. Sploty

### 2.26.1. Splot zmiennych dyskretnych

Splotem rozkładów zmiennych losowych nazywamy rozkład sumy zmiennych losowych niezależnych. Jeżeli  $X$  i  $Y$  są zmiennymi losowymi o rozkładach dyskretnych, to splot tych dwóch zmiennych wyraża się wzorem

$$P(X + Y = s) = \sum_{s_1, s_2: s_1 + s_2 = s} P(X = s_1, Y = s_2) = \sum_{s_1, s_2: s_1 + s_2 = s} P(X = s_1) \cdot P(Y = s_2)$$

### 2.26.2. Splot zmiennych ciągłych

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych o rozkładach ciągłych jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością będącą splotem gęstości

$$(g_1 \cdot g_2)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(z-y)g_2(y)dy$$

### 2.27. Nieskończone ciągi zmiennych niezależnych

Zmienne losowe  $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej nazywamy niezależnymi, gdy dla każdego skończonego ciągu indeksów  $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , zmienne losowe  $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$  są niezależne.

### 2.28. Rozkład warunkowy

#### 2.28.1. Rozkład warunkowy dla zmiennej dyskretnej

Dla wektora  $(X, Y)$  o rozkładzie dyskretnym i  $P(Y = y) > 0$  możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(X \in A | Y = y) = \frac{P(X \in A, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{\sum_{i: x_i \in A} P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)}$$

#### 2.28.2. Rozkład warunkowy dla zmiennej ciągłej

Gęstością rozkładu warunkowego  $X$  pod warunkiem  $Y = y$  nazywamy funkcję określoną dla  $x \in \mathbb{R}$  wzorem

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, & \text{o ile } f_Y(y) > 0 \\ g(x), & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

gdzie  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$  jest gęstością rozkładu brzegowego  $Y$ , a  $g$  dowolną ustaloną gęstością

## 2.29. Warunkowa wartość oczekiwana

### 2.29.1. Wartość oczekiwana rozkładu warunkowego

Dla danego rozkładu warunkowego zmiennej  $Y$  można wyznaczyć wartość oczekiwaną takiego rozkładu. Nazywamy ją warunkową wartością oczekiwaną  $Y$  i oznaczamy  $\mathcal{E}(Y|X = x)$ . Gdy rozkład jest dyskretny, to

$$\mathcal{E}(Y|X = x) = \sum_j y_j P(Y = y_j|X = x)$$

a gdy jest ciągły, to

$$\mathcal{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

### 2.29.2. Twierdzenie

Gdy istnieje  $\mathcal{E}Y$ , to istnieje  $\mathcal{E}(Y|X = x)$

### 2.29.3. Warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej

Dla znanego rozkładu warunkowego zmiennej  $Y$  można wyznaczyć wartość oczekiwaną takiego rozkładu. Nazywamy ją warunkową wartością oczekiwaną  $Y$  i oznaczamy  $\mathcal{E}(Y|X = x)$ . Gdy rozkład jest dyskretny, to

$$\mathcal{E}(Y|X = x) = \sum_j y_j P(Y = y_j|X = x)$$

a gdy jest ciągły, to

$$\mathcal{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

#### 2.29.4. Warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej $Y$ pod warunkiem zmiennej losowej $X$

Warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $Y$  pod warunkiem zmiennej losowej  $X$ , którą będziemy oznaczać  $\mathcal{E}(Y|X)$ , definiujemy wzorem

$$\mathcal{E}(Y|X) = m(X)$$

gdzie  $m(x) = \mathcal{E}(Y|X = x)$ .

#### 2.29.5. Własności warunkowej zmiennej losowej

Niech  $(X, Y, Z)$  będzie wektorem losowym. Załóżmy, że wartości oczekiwane  $\mathcal{E}X$  i  $\mathcal{E}Y$  istnieją. Wtedy:

1. Jeśli  $X \geq 0$ , to  $\mathcal{E}(X|Z) \geq 0$
2.  $|\mathcal{E}(X|Z)| \leq \mathcal{E}(|X||Z)$
3. Dla  $a, b \in \mathbb{R}$  istnieje warunkowa wartość oczekiwana  $aX + bY$  i  $\mathcal{E}((aX + bY)|Z) = a\mathcal{E}(X|Z) + b\mathcal{E}(Y|Z)$
4. Dla dowolnego zdarzenia  $A$  jest  $\mathcal{E}(1_A|Z) = P(A|Z)$

Niech  $(X, Y)$  będzie wektorem losowym i niech  $\mathcal{E}Y$  istnieje. Wtedy:

1.  $\mathcal{E}(\mathcal{E}(Y|X)) = \mathcal{E}Y$
2. Gdy  $X, Y$  są niezależne, to  $\mathcal{E}(Y|X) = \mathcal{E}Y$
3. Gdy  $h(X)$  jest ograniczoną zmienną losową, to  $\mathcal{E}(h(X)Y|X) = h(X)\mathcal{E}(Y|X)$

### 3. Część III - statystyka

#### 3.1. Nierówność Czebyszewa

Niech  $X$  będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy dla dowolnego  $\epsilon > 0$

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathcal{E}X}{\epsilon}$$

##### 3.1.1. Nierówność Markowa

Niech  $p > 0$ . Wtedy dla dowolnego  $\epsilon > 0$

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathcal{E}|X|^p}{\epsilon^p}$$

### 3.1.2. Nierówność Czebyszewa-Bienaymé

Dla dowolnego  $\epsilon > 0$

$$P(|X - \mathcal{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathcal{D}^2 X}{\epsilon^2}$$

### 3.1.3. Wykładnicza nierówność Czebyszewa

Jeśli  $\mathcal{E}e^{pX} < \infty$  dla pewnego  $p > 0$ , to dla  $\lambda \in [0, p]$

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathcal{E}e^{\lambda X}}{e^{\lambda \epsilon}}$$

dla dowolnego  $\epsilon$

## 3.2. Prawa Wielkich Liczb

### 3.2.1. Prawo Wielkich Liczb Bernoulliego

Jeśli  $S_n$  jest liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego  $n$  prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym  $p$ , to dla każdego  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \epsilon\right) = 1$$

### 3.2.2. Słabe Prawo Wielkich Liczb (SPWL)

Niech  $(X_n)_n$  będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}^2 S_n}{n^2} = 0$   
lub
2.  $X_n$  są parami nieskorelowane i mają wspólnie ograniczone wariancje

Niech  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ . Wtedy  $(X_n)_n$  spełnia SPWL, czyli dla każdego  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n - \mathcal{E}S_n}{n}\right| > \epsilon\right) = 0$$

### 3.2.3. Mocne Prawo Wielkich Liczb Bernoulliego

Oznaczmy przez  $S_n$  liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego  $n$  prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym  $p$ . Wtedy dla każdego  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \geq n} |\frac{S_k}{k} - p| \leq \epsilon) = 1$$

### 3.2.4. Twierdzenie Kołmogorowa

Jeśli  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że  $\mathcal{D}^2 X_n < \infty$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ , przy czym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}^2 X_n}{n^2} < \infty$$

to z prawdopodobieństwem 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathcal{E}S_n}{n} = 0$$

### 3.2.5. Mocne Prawo Wielkich Liczb (MPWL) Kołmogorowa

Jeżeli  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  jest ciągiem niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie,  $\mathcal{E}|X_1| < \infty$ ,  $(X_n)_n$  spełnia MPWL, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathcal{E}X_1$$

z prawdopodobieństwem 1

## 3.3. Twierdzenia Poissona

### 3.3.1. Twierdzenie Poissona

Jeśli  $n \rightarrow \infty$ ,  $p_n \rightarrow 0$  i  $np_n \rightarrow \lambda > 0$ , to

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

### 3.3.2. Twierdzenie

Niech zmienna losowa  $S_n$  ma rozkład Bernoulliego z parametrami  $n, p$  i niech  $\lambda = np$ . Wtedy dla każdego zbioru  $B \subset \{0, 1, 2, \dots\}$  mamy

$$|P(S_n \in B) - \sum_{k \in B} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \frac{\lambda^2}{n}$$

### 3.4. Rozkład Gaussa

$\mathcal{N}(0, 1)$  ma gęstość

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Jeśli zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$ , to zmienna losowa  $\sigma X + m$ , gdzie  $\sigma > 0$  ma rozkład  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  o gęstości  $\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

### 3.5. Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG)

#### 3.5.1. Wersja najprostrza

Niech  $X, X_1, X_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, niech  $\mathcal{E}X = m$  i  $\mathcal{D}^2X = \sigma^2 > 0$ . Wtedy dla każdego  $t$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(t)$$

#### 3.5.2. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a

Niech  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ,  $h = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ . Wtedy

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) - \left(\Phi\left(b + \frac{1}{2}h\right) - \Phi\left(a - \frac{1}{2}h\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

### 3.5.3. Twierdzenie Berry-Esséen

Jeśli  $(X_n)$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i  $\mathcal{E}|X_1|^3 < \infty$ ,  $S_n X_1 + \dots + X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , to

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |P(\frac{S_n - \mathcal{E}S_n}{\sqrt{\mathcal{D}^2 S_n}} \leq t) - \Phi(t)| \leq C \frac{\mathcal{E}|X_1 - \mathcal{E}X_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

gdzie  $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}^2 X_1}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq C < \frac{4}{5}$

### 3.6. Populacja i próba

Pojedynczą wartość parametru nazywamy cechą statystyczną. Cechy mogą być ilościowe lub jakościowe.

Statystyczną populacją (lub w skrócie populacją) nazywamy zbiór wszystkich możliwych cech pewnego wybranego parametru.

Obiekt którego cechę badamy nazywamy jednostką statystyczną.

Prostą próbą losową o licznosci  $n$  nazywamy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$  określonych na populacji i takich, że każda z nich ma ten sam rozkład.

Statystyką nazywamy funkcję przypisującą wartości rzeczywiste dla próby losowej.

### 3.7. Średnia i częstość

#### 3.7.1. Średnia ("cechy ilościowe")

Średnią w prostej próbie losowej  $X_1, \dots, X_n$  o licznosci  $n$  nazywamy statystykę

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

#### 3.7.2. Częstość ("cechy jakościowe")

Częstością występowania w prostej próbie losowej nazywamy statystykę

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

gdzie  $X_1, \dots, X_n$  jest prostą próbą losową z rozkładu dwupunktowego o wartościach 0 i 1.

### 3.8. Estymatory

Statystykę  $T(X_1, \dots, X_n)$  służącą do oszacowania nieznanego parametru populacji nazywamy estymatorem.

#### 3.8.1. Wartość estymatora

Dla konkretnych wartości próby  $T(x_1, \dots, x_n)$  nazywamy wartością estymatora.

#### 3.8.2. Obciążenie estymatora

Niech  $\theta$  będzie liczbą rzeczywistą oznaczającą nieznaną wartość parametru populacji i niech  $\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  będzie pewnym estymatorem parametru  $\theta$ . Różnicę między wartością średnią estymatora, a nieznaną wartością parametru,  $\mu_{\hat{\theta}} - \theta$ , nazywamy obciążeniem estymatora.

#### 3.8.3. Estymator nieobciążony

Estymator  $\hat{\theta}$  nazywamy nieobciążonym, gdy jego obciążenie jest równe 0, tzn.  $\mu_{\hat{\theta}} = \theta$  dla dowolnej wartości  $\theta$ , którą może przyjmować parametr i dowolnej liczności próby  $n \geq 1$ .

#### 3.8.4. Estymator nieobciążony o minimalnej wariancji (NMW)

Niech  $\theta$  będzie liczbą rzeczywistą oznaczającą nieznaną wartość parametru populacji. Nieobciążony estymator  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  parametru  $\theta$  nazywamy estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji (w skrócie estymatorem NMW), jeżeli wśród wszystkich estymatorów nieobciążonych parametru  $\theta$  nie istnieje estymator, którego wariancja byłaby mniejsza dla jakiegokolwiek wartości  $\theta$ .

### 3.9. Błędy

#### 3.9.1. Błąd średniokwadratowy

Wartość średnią kwadratu odległości  $(\hat{\theta} - \theta)^2$ ,  $\mu_{(\hat{\theta} - \theta)^2}$  nazywamy błędem średniokwadratowym estymatora  $\hat{\theta}$ .

### 3.9.2. Estymator dopuszczalny

Estymator  $\hat{\theta}$ , dla którego nie istnieje estymator  $\tilde{\theta}$  taki, że  $\mu_{(\tilde{\theta}-\theta)^2} \leq \mu_{(\hat{\theta}-\theta)^2}$  dla każdego  $\theta$  i nierówność ostra zachodzi dla pewnego  $\theta_0$ , nazywamy estymatorem dopuszczalnym.

Dla dowolnego estymatora  $\hat{\theta}$  jego błąd średniokwadratowy jest sumą jego kwadratu obciążenia

$$\mu_{(\hat{\theta}-\theta)^2} = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + \mu_{(\hat{\theta}-\theta)^2}$$

### 3.9.3. Błąd standardowy

Błędem standardowym estymatora  $\hat{\theta}$  nazywamy dowolny estymator jego odchylenia standardowego  $\sigma_{\hat{\theta}}$  i oznaczamy go  $SE_{\hat{\theta}}$ .

#### 4. Motywacyjna pszczoła

