



Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

AGH University of Science
and Technology

Metody numeryczne

Janusz Miller

Katedra Informatyki Stosowanej
AGH University of Science and Technology

26.10.2021

Część IV

Interpolacja

- Wprowadzenie

1 Interpolacja Lagrange'a

- Błędy
- Nierównomierny rozkład węzłów interpolacji

2 Interpolacje innymi wielomianami – potęgowymi i innymi

3 Interpolacja funkcjami sklejanymi

- Interpolacja sześciennymi funkcjami sklejanymi

Istota interpolacji



Zadanie interpolacji:

Znaleźć funkcję (w określonej klasie) przyjmującą wartości równe wartościom innej, zadanej funkcji.

Pojęcia:

- Funkcja interpolowana $f(x)$.
- Funkcja interpolująca, np. $L_n(x)$.
- Węzły interpolacji.

Interpolacja Lagrange'a



Dane: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$ $n \geq 1$ – węzły interpolacji spełniające

- ① $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$,
- ② wartości funkcji interpolowanej
 $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Szukamy wielomianu L_n spełniającego warunki

- ① stopnia: $\deg L_n \leq n$,
- ② zgodności: $L_n(x_i) = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$.

Twierdzenie:

Istnieje dokładnie jeden wielomian L_n spełniający warunki (1) i (2).

Interpolacja Lagrange'a c.d.



Wielomian Lagrange'a:

$$l_{i,n}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

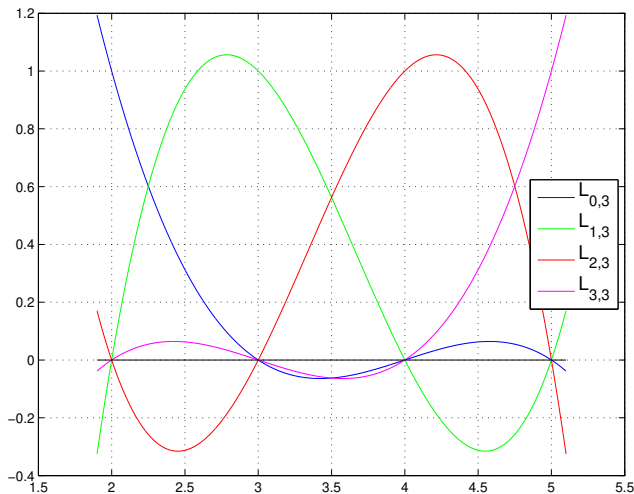
$$l_{i,n} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Wielomian (wzór) interpolacyjny Lagrange'a:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_{i,n}(x).$$

Wielomiany Lagrange'a c.d.

Przykład



Interpolacja Lagrange'a c.d.



Jednoznaczność wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a a różne postaci wzorów.

- 1 Wzór interpolacyjny Lagrange'a.
- 2 Postać Newtona wielomianu $L_n(x)$.
- 3 Zapis macierzowy z macierzą Vandermonde'a.

Interpolacja Lagrange'a c.d.

Postać Newtona wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a



Ilorazy różnicowe – definicja:

$$f[x_0] = f(x_0),$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0},$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_i] - f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}.$$

Interpolacja Lagrange'a c.d.

Postać Newtona wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a



Twierdzenie:

Zachodzi związek

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}.$$

Iloczyny czynnikowe:

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Interpolacja Lagrange'a c.d.

Postać Newtona wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a c.d.



Postać naturalna (kanoniczna) wielomianu:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Algorytm Hornera:

$$P(x) = (\dots ((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0.$$

Postać Newtona wielomianu:

$$P(x) = (\dots (b_n(x - x_{n-1}) + b_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + b_1)(x - x_0) + b_0.$$

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a można zapisać w postaci Newtona:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x),$$

gdzie $b_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$.

Interpolacja Lagrange'a c.d.

Algorytm z macierzą Vandermonde'a



Warunki zgodności w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix},$$

$$Va = y.$$

Macierz V dla dużych n źle uwarunkowana.

Błąd interpolacji Lagrange'a



Błąd interpolacji funkcji $f(x)$ (klasy C^{n+1}) wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad c \in (x_0, x_n).$$

Aby wykorzystać, trzeba:

- oszacować wartość wielomianu $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$,
- oszacować $(n+1)$. pochodną funkcji $f(x)$

w całym przedziale (x_0, x_n) .

Oszacowanie błędu interpolacji Lagrange'a dla węzłów równomiernie rozłożonych



Jeżeli

$x_i - x_{i-1} = h$ dla każdego $i = 1, \dots, n$

oraz

$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$,

to dla $x \in [x_0, x_n]$ zachodzi

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}.$$

Błąd interpolacji

Efekt Rungego



AGH

Pytanie:

Czy zwiększanie liczby równomiernie rozłożonych w stałym przedziale węzłów gwarantuje zmniejszanie błędu interpolacji Lagrang'e?

Na to pytanie należy odpowiedzieć po sprawdzeniu błędu interpolacji funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

dla $x \in [-a, a]$, $0 < a \leq 5$.

Numeryczny błąd wyznaczania współczynników funkcji interpolującej



Przy ocenie błędu interpolacji nie należy zapominać o błędzie numerycznym algorytmu zastosowanego do obliczenia współczynników wielomianu interpolacyjnego!

Interpolacja Lagrange'a z nierównomiernym rozkładem węzłów



AGH

Rozważamy różne wielomiany interpolacyjne Lagrange'a dla ustalonego (jednego) przedziału $[a, b]$ interpolacji i ustalonej liczby $n + 1$ węzłów.

- Maksymalną wartość wielomianu w zadanym przedziale interpolacji $[a, b]$ można zmieniać przez przesuwanie węzłów x_i .
- Stawiamy zadanie doboru węzłów tak, aby $\sup_{x \in [a, b]} |W(x)|$ miało najmniejszą wartość.
- Rozwiązanie: Węzły należy ustawić w pierwiastkach wielomianu Czebyszewa.

Interpolacja Lagrange'a z nierównomiernym rozkładem węzłów c.d.

Węzły w pierwiastkach wielomianu Czebyszewa



Wielomiany Czebyszewa:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Dla przedziału $[-1, 1]$ pierwiastki wielomianu:

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Dla $W_k(x) = 2^{-k} T_{k+1}(x)$

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |W_k(x)| = 2^{-k}.$$

Interpolacja Lagrange'a z nierównomiernym rozkładem węzłów

Węzły w pierwiastkach wielomianu Czebyszewa c.d.



Otrzymujemy **minimalne oszacowanie** błędu interpolacji Lagrange'a

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

Interpolacja Hermite'a



Dane są węzły

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

liczby naturalne (z zerem)

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$$

oraz

$$f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Mówimy, że węzeł i jest $(\gamma_i + 1)$ krotny.

Oznaczmy $m = n + \sum_{i=0}^n \gamma_i$.

Szukamy wielomianu $H_m(x)$ stopnia m takiego, że

$$H_m^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Interpolacja Hermite'a c.d.

Błąd interpolacji Hermite'a



Błąd interpolacji Hermite'a

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{\gamma_i+1}, \quad c \in (x_0, x_n).$$

Należy porównać z błędem interpolacji Lagrange'a.

Interpolacja wielomianami trygonometrycznymi



- Stosowana szczególnie dla funkcji okresowych, stąd założenie o przedziale interpolacji: $[0, 2\pi \frac{n-1}{n}]$, gdzie n jest liczbą węzłów¹.
- Węzły są rozłożone równomiernie, tzn, $x_i = i \cdot \frac{2\pi}{n}$ $i = 0, 1, \dots, (n-1)$.
- WAŻNE: Wielomian trygonometryczny jest funkcją liniową względem swoich współczynników (a_i i b_i , $i = 0, 1, \dots, m$).

¹UWAGA: W interpolacji Lagrange'a przez n oznaczaliśmy liczbę węzłów - 1.

Interpolacja wielomianami trygonometrycznymi c.d.



Trygonometryczna funkcja interpolująca:

- dla nieparzystej liczby węzłów i $m = \frac{n-1}{2}$

$$\Theta(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^m [a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)],$$

- dla n parzystego i $m = \frac{n}{2}$:

$$\Theta(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} [a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)] + \frac{a_m}{2} \cos(mx),$$

gdzie (w obu przypadkach)

$$a_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) \cos(jx_i)],$$

$$b_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) \sin(jx_i)].$$

Sześcienna funkcja sklejana

Funkcja sklejana



- Dane są węzły $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ oraz wartości funkcji $f: f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.
- Funkcja sklejana S interpolująca funkcję f jest określona poprzez funkcje S_i na każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.
- Funkcja S spełnia $2n$ warunki zgodności wartości funkcji w węzłach, tzn.

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= f(x_i), \\ S_i(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Sześcienna funkcja sklejana



W przypadku **sześciennej funkcji sklejaney**:

- S_i jest wielomianem stopnia ≤ 3 , $i = 0, 1, \dots, n - 1$.
- Muszą być spełnione $n - 1$ warunki ciągłości **pierwszej** pochodnej

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n - 2$$

i $n - 1$ warunki ciągłości **drugiej** pochodnej

$$S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n - 2.$$

W sumie:

- 1 Funkcja S ma $4n$ współczynników.
- 2 Funkcja S ma spełnić $2n + (n - 1) + (n - 1) = 4n - 2$ warunki.

Dla jednoznaczności funkcji interpolującej dodaje się dwa „dodatkowe” warunki.

Sześcienna funkcja sklejana c.d.

Warunki „dodatkowe” - wersje



Wersje sześciennnej interpolacji sklejaney:

- Otwarta (naturalna)

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$$

- Zamknięta

$$S''(x_0) = f''(x_0) \text{ i } S'(x_n) = f'(x_n).$$

- „Not-a-knot”

$$S_0'''(x_1) = S_1'''(x_1) \text{ i } S_{n-2}'''(x_{n-1}) = S_{n-1}'''(x_{n-1}).$$

Efekt: Odpowiednie współczynniki pary wielomianów S_0 i S_1 oraz pary S_{n-2} i S_{n-1} są sobie równe, czyli „znikają” 2 węzły (x_1 i x_{n-1}).

- Dla funkcji okresowych

$$S'(x_0) = S'(x_n), \quad S'(x_0) = S'(x_n).$$

Algorytm obliczania współczynników wielomianu sklejanego



Szukamy współczynników wielomianu $S_i(x)$ w postaci

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Wtedy $a_i = f(x_i)$.

Warunki ciągłości 1. i 2. pochodnej można zapisać w postaci

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad c_{i+1} = c_i + 3d_{i+1} h_i,$$

gdzie $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Ww. związki umożliwiają wyrugowanie współczynników a, b, d i zredukowanie układu $4n$ równań do równania macierzowego z macierzą $H \in \mathbb{R}^{n+1, n+1}$.

Algorytm obliczania współczynników wielomianu sklejanego c.d.



Układ równań $Hc = b$ dla wersji otwartej (naturalnej)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_i = x_{j+1} - x_i, \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

WAŻNE: Macierz H – diagonalnie dominująca.

Algorytm obliczania współczynników wielomianu sklejanego c.d.



Wektor niewiadomych c i wektor prawej strony równania b dla wersji otwartej (naturalnej)

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1-a_0)}{h_1} c_1 \\ \vdots \\ \frac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1}-a_{n-2})}{h_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jakie znaczenie praktyczne ma dominacja elementów na przekątnej głównej?

Oszacowanie błędu sześcienniej interpolacji sklejaney



Jeżeli funkcja interpolowana $f \in C^2[x_0, x_n]$,
to

$$|S(x) - f(x)| \leq 5M_2 \max_{i=0,1,\dots,n-1} h_i^2 \quad \text{dla } x \in [x_0, x_n],$$

gdzie

$$M_2 = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f''(x)|, \quad h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi c.d.

Shape Preserving Interpolation



AGH

www.agh.edu.pl

PCHIP - Piecewise Cubic Hermite Interpolation Polynomial

- Nie ma warunku ciągłości 2. pochodnej.
- Oblicza się średnie nachylenie funkcji na odcinku między węzłami $\delta_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h_k}$.

$$P_k(x) = \frac{3h_k s^2 - 2s^3}{h_k^3} f(x_{k+1}) + \frac{h_k^3 - 3h_k s^2 + 2s^3}{h_k^3} f(x_k) + \frac{s^2 - (s - h_k)}{h_k^2} P'(x_{k+1}) + \frac{s - (s - h_k)^2}{h_k^2} P'(x_k)$$

gdzie $s = x - x_k$.

Wartości pochodnych $d_k = P'(x_k)$ przyjmuje się wg reguły (poniżej).

Interpolacja funkcjami sklejanymi c.d.

Shape Preserving Interpolation, cd.



Idea:

Przyjąć takie wartości pochodnych w węzłach, aby wartości funkcji interpolującej nie przekraczały wartości w węzłach (przynajmniej lokalnie).

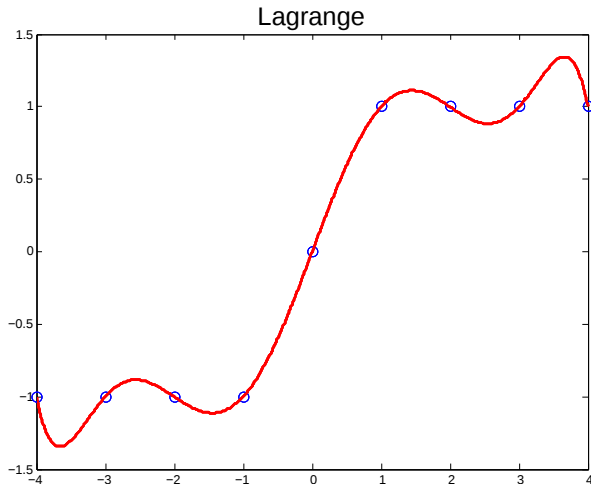
- Jeżeli δ_{k-1} i δ_k są przeciwnego znaku lub jedno z nich (lub obydwa) jest równe zero, to $d_k = 0$.
- Jeżeli δ_{k-1} i δ_k są tego samego znaku, to obliczamy średnią harmoniczną:

$$\frac{1}{d_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_{k-1}} + \frac{1}{\delta_k} \right).$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi c.d.

Porównanie interpolacji na przykładzie skoku jednostkowego

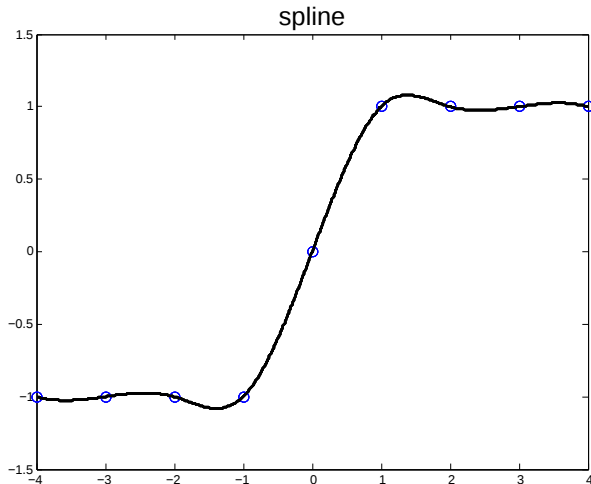
– interpolacja Lagrange'a, sześcienna interpolacja sklejana, PCHIP



Interpolacja funkcjami sklejanymi c.d.

Porównanie interpolacji na przykładzie skoku jednostkowego

– interpolacja Lagrange'a, sześcienna interpolacja sklejana, PCHIP



Interpolacja funkcjami sklejanymi c.d.

Porównanie interpolacji na przykładzie skoku jednostkowego

– interpolacja Lagrange'a, sześcienna interpolacja sklejana, PCHIP

